

数学の概念問題の開発とピア・インストラクション を導入した線形代数入門講義の実践と分析

Development of Concept Test of Mathematics and Implementation and Analysis of Peer Instruction in Introductory Linear Algebra Lecture

工藤 知草, 山岡 英孝, 谷口 哲也, 西 誠
Tomoshige KUDO, Hidetaka YAMAOKA,
Tetsuya TANIGUCHI, Makoto NISHI

ピア・インストラクション型講義を数学の分野で実践するためには、数学の概念問題を豊富に開発する必要がある。これまでに、線形代数、微積分、確率統計の概念問題を開発した。2016年度と2017年度の3クラスで、ピア・インストラクションを導入した線形代数入門講義を実践し、概念問題の議論効果を仮説検定で定量分析し、t検定により議論効果が低い数学の単元を示した。

キーワード：ピア・インストラクション、クリッカー、数学、線形代数、概念問題

To deliver Peer Instruction lecture in mathematics, it is needed for us to make concept tests of mathematics, abundantly. We made concept tests for linear algebra, calculus, and probability statistics until now. We delivered Peer Instruction lectures in introductory linear algebra for three classes in first semester in 2016 and 2017 academic years. We analyzed the effects of peer discussions for concept tests by using hypothesis testing quantitatively, and showed the unit in mathematics for which discussion effect was low by using the t-test.

Keywords: Peer Instruction, Clicker, Mathematics, Linear Algebra, Concept Test

1. はじめに

伝統的な数学の講義は、主に板書と演習が中心で、学生同士の話し合いを取り入れた講義形態に移行することが難しい分野の一つになる。近年、数学の分野でも、単に計算力を養うだけではなく、学生同士の対話により論理的思考力を養うような相互作用型講義に移行することが重要な課題となっている¹⁾。ここで、物理の分野では、チュートリアル、相互作用型演示実験授業 (ILDs), Physics by Inquiry (PBI), 仮説実験授業、玉田方式、極地方式、ピア・インストラクション型授業など、多くの相互作用型講義形式がある²⁾。その中で、通常の大規模な教室でも教員1名で実施できるピア・インストラクション (Peer Instruction)³⁾に着目し、物理の分野で実践してきた⁴⁾。この講義の特徴は、多肢選択肢問題の概念問題 (Concept Test) を出題し、通常の板書や演習と組み合わせて学生同士の対話により論理的思考力を養うことが可能になる。ピア・インストラクションでは概念問題を出題し、学生がクリッカーで正答だと思われる番号を回答した後、学生同士だけで3分程度の議論をする。ここで、教師は議論に介入しないのが特徴になる。その後、学生は再度クリッカーで回答する。

この3分程度の議論を有意義にするような数学の概念問題が必要になる。物理の分野では概念問題が豊富にあるが³⁾、数学の分野の概念問題は少ないのが現状である。そこで、我々のグループでは、数学の概念問題を、線形代数、微積分、確率統計の分野において開発してきた⁵⁾。ここで、物理の分野のほとんどの概念問題は、直観的に誰でも答えられるように構成され、大学の講義だけでなく、中学と高校の授業でもそのまま活用できるように構成されている。数学の概念問題において、3分程度の議論で直観的に回答できるように構成し、さらに、これまで数学の講義を実施してきた経験を踏まえ、学生が間違えやすい要素を選択肢の誤回答に入れた。一方で、「高大接続システム改革会議」最終報告書（平成28年3月31日）⁶⁾において「数・式、図、表、グラフなどを活用し、一定の手順にしたがって数学的に処理する力など、思考力・判断力・表現力を構成する諸能力に関する判定機能を強化する」と提言されている。そこで、概念問題において、数・式、図、表、グラフに関連して、思考力・判断力・表現力などの判定機能を強化するように工夫した。ピア・インストラクションを導入した講義を物理の分野ばかりでなく数学の分野でも実践してきた⁵⁾。これまでに、線形代数⁷⁾、微積分⁸⁾、確率統計^{9), 10)}の講義で実践した。

この論文の目的は、筆者の一人である工藤が2016年度と2017年度の前学期に担当した線形代数入門講義（講義名称「線形代数Ⅰ」）の3クラスの議論効果をt検定で定量分析し、学生が苦手とする数学の単元を抽出することにある。

2. ピア・インストラクションを導入した講義形式

2. 1 ピア・インストラクションの流れ

はじめに、線形代数入門講義の具体的な内容について説明する。2016年度の前学期は工学部電気電子工学科の1クラス（以下、クラスA）を担当し、2017年度の前学期は情報フロンティア学部経営情報学科・心理情報学科の1クラス（以下、クラスB）と、環境・建築学部環境土木工学科の1クラス（以下、クラスC）を担当し、合計3クラスを担当した。主に1年生対象で、講義時間は90分で合計16回の講義になる。小テストは3回、期末試験は1回で、レポート課題は2回ある。各講義のはじめには、演習課題を配り、提出させ、採点后に返却した。実際に行ったピア・インストラクションを導入した線形代数入門講義の流れを以下の（1）～（10）で示す。

- （1）教員が通常の板書型講義を行う。
- （2）学生同士で演習問題を解く時間をつくり、机間巡視して学生の質問に答える。
- （3）教員が講義内容に関連した概念問題（選択肢問題）を出題する。
- （4）学生は、はじめ独自に考え、正答だと思う選択肢番号をクリックカーで回答する。
- （5）クラス全体の回答番号のヒストグラムがスクリーンに表示される。
- （6）学生同士で3分程度議論する。意見が異なる場合、相手を説得するように試みる。
- （7）再度、学生はクリックカーを用いて、正答だと思う選択肢番号を回答する。
- （8）クラス全体の回答番号のヒストグラムがスクリーンに表示される。
- （9）学生の意見を聞き、どのような議論をしたかを答えてもらう。
- （10）教員が正解を発表し、詳しい説明をする。

ここで（6）の学生同士の議論が活発に行われないうちは、4名程度のグループに分け、その中にファシリテーター役の学生を一人決めて議論させた。ファシリテーターは、全員の意見を聞いて議論を円滑に進める役目をもつ。ここで、まわりの学生には、ファシリテーターに協力して議論するように促した。毎回、ファシリテーター役の学生を変えて、議論に慣れるように工夫した。このとき、教員は議論に介入せず、学生同士だけで議論させた。自分の意見を論理



図1 クリックカー

的に説明する訓練を学生同士で繰り返すことで、学生が主体的に講義に参加することにつながる。ここで(9)は、自分のグループ以外の意見を聞くことで、多角的な思考を養うことにつながる。ただし、(9)は講義時間が少ないときには省略した。ここで、(4)、(7)ではクリッカーを活用した(図1)。「大学教育への提言―未知の時代を切り拓く教育とICT活用―」¹¹⁾では「グループでの学び合いやピア・インストラクションで能動的学修を促す」とあり、その際に「学修成果を教員が確認し、理解が不足している部分を講義及び演習を通じて指導する。その際、クリッカーなどを利用してリアルタイムで理解度の状況を把握しながら行う」との提言がある。クリッカーを活用する利点は、教員が学生の理解度を確認しながら、理解度に応じた講義を展開することができることにある。

2. 2 概念問題に対する数学の因子

ピア・インストラクションを導入した線形代数入門講義で実施した線形代数に関する概念問題は16問で、数学の単元との関係を表1で示した。Aクラスは概念問題1～11、Bクラスは概念問題1～15、Cクラスは概念問題1～16を実施した。1つの概念問題に複数の数学の単元が関連している場合もあり、例えば、概念問題8では「平面の方程式」と「内積の性質」が関連している。また、1つの数学の単元に、複数の概念問題が対応している場合もあり、例えば、「直線の方程式の一般形」には、概念問題1, 3, 4が対応している。

表1 概念問題に対応する数学の単元の対応表

概念問題の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
直線の方程式の一般形	○		○	○												
2次関数		○														
ベクトルの実数倍			○	○												
媒介変数			○	○												
直線のベクトル方程式			○	○												
空間での直線の方程式					○	○										
ベクトルの平行						○										
平面の方程式							○	○								
ベクトルの垂直条件							○									
内積の性質							○	○								
点の線形写像									○							
図形の線形写像										○	○					
回転行列												○	○			○
対称移動の行列														○	○	

2. 3 概念問題の例

次に、概念問題の例と、3クラスの正答率の変化を示す。図2は概念問題8を示し、表2は議論前後で正答率がどのように変化したかを示す。学生同士の議論時間は3分程度でも3クラスともに議論により正答率が30%以上増加していることが分かる。

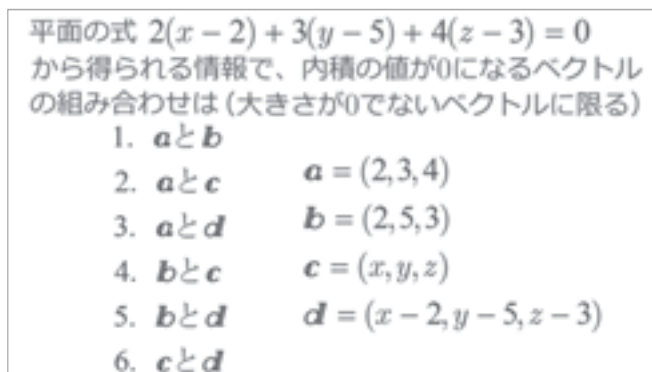


表 2 議論前後の正答率

クラス	議論前 正答率	議論後 正答率
A	58.4 %	93.9 %
B	56.3 %	93.8 %
C	43.9 %	75.6 %

図 2 概念問題 8

2. 4 概念問題の議論前後の正答率の変化と議論効果

図 3 は, 2016 年度と 2017 年度の 3 クラスの線形代数に関連した概念問題の議論前後の正答率の変化を示す. 横軸は議論前正答率, 縦軸は議論後正答率を示す. 講義で実施した線形代数に関する概念問題は, 2016 年度の A クラスでは 11 問, 2017 年度の B クラスでは 15 問, C クラスでは 16 問で合計 42 問であった. ここで 3 クラス共通に実施した概念問題は 11 問になる.

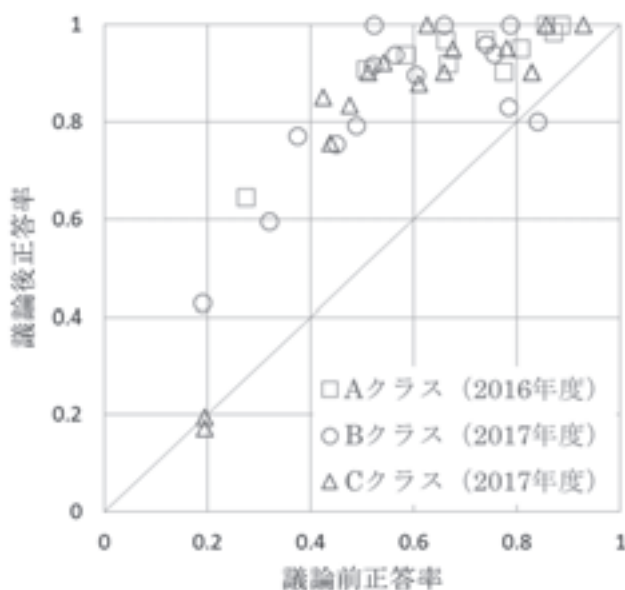


図 3 議論前後の正答率の変化

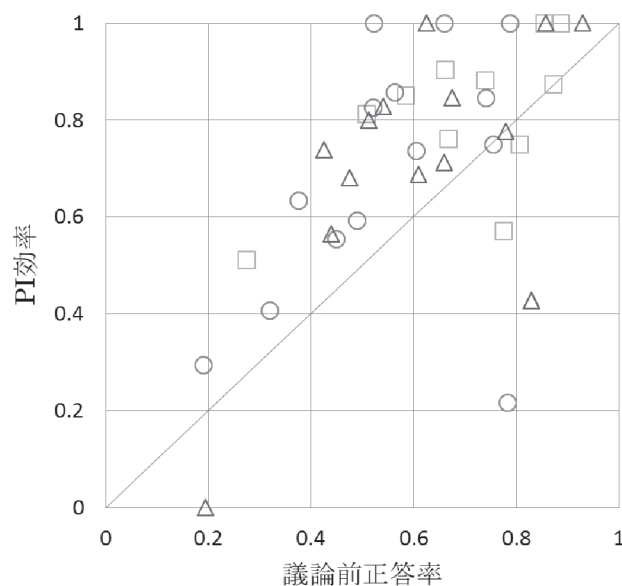


図 4 議論前後の PI 効率

概念問題の議論前正答率, 議論後正答率をそれぞれ, $\langle S_{pre} \rangle$ [%], $\langle S_{post} \rangle$ [%] とおくと, 概念問題の PI 効率 η は以下で定義される¹²⁾.

$$\eta = \frac{\langle S_{post} \rangle - \langle S_{pre} \rangle}{100 - \langle S_{pre} \rangle}$$

ここで, PI 効率は, 議論効果や理解度の指標を示す. 図 4 は議論効果のグラフを示し, 横軸は議論前正答率, 縦軸は PI 効率を示す. 図 3, 4 において, A クラス, B クラス, C クラスをそれぞれ, $\square$, $\circ$, $\triangle$ で示した. 図 4 の実線は, 標準直線を示す¹²⁾.

2. 5 議論効果の t 検定による分析

図 4 において、標準直線（実線の直線）からのデータのずれを δ とする¹²⁾。

$$\delta = \frac{\eta - \langle S_{\text{pre}} \rangle}{\sqrt{2}}$$

ここで、2016 年度と 2017 年度に実施した 3 クラスの線形代数に関する概念問題の 42 個の δ の平均値は 0.052、標準偏差は 0.20 であった。この δ を母集団とし仮説検定を行った。具体的には、母集団の δ の標本と表 1 の数学の各単元に関連した概念問題の δ の各標本との 2 標本で、t 検定を行った。

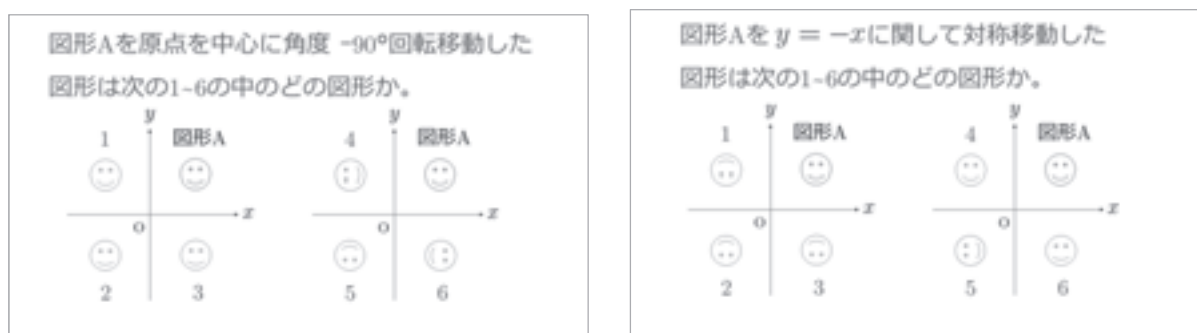


図 5 図形の線形変換の概念問題 10（左図）と概念問題 11（右図）

図 5 は「図形の線形変換」に関連した概念問題を示す。概念問題 10 の正解は 6 で概念問題 11 の正解は 5 になる。図 6 はそれらの 3 クラス分の PI 効率を示す。この「図形の線形変換」の概念問題 10, 11 の δ (6 個) の標本は平均値が -0.12 、標準偏差が 0.19 であった。t 検定を用いて、母集団に対し「図形の線形変換」を 5 % の有意水準で片側検定した結果、検定統計量は $t = -1.97$ で、 $t_{0.05} = -1.68$ より小さくなった。「図形の線形変換」の概念問題は、他の数学単元の概念問題よりも低いことが、仮説検定により定量的に示された。

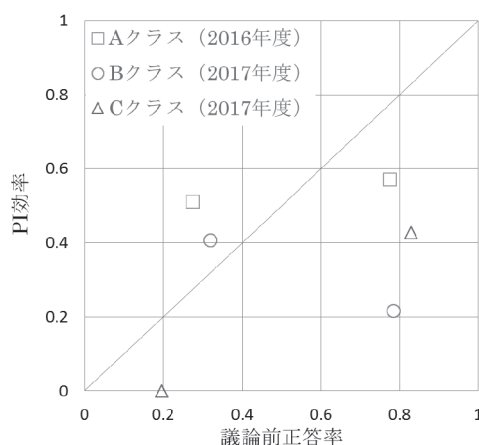


図 6 図形の線形変換の PI 効率

3. アンケート結果

2017 年度の B クラスと C クラスの講義後のアンケート結果について報告する。以下の設問 (1) ~ (3) に対する 5 段階評価による 2 クラス分の学生の回答率は、図 7 のようになった。

(1) 友達と議論して回答することで、概念問題に対する理解は深まりましたか。

(回答 5 : 深まった, 回答 1 : 深まらなかった)

(2) クリッカーを用いた学習では、積極的に議論に参加できましたか。

(回答 5 : 積極的に議論した, 回答 1 : 積極的に議論しなかった)

(3) ピア・インストラクション型講義で培う汎用的能力は、金沢工業大学の教育の中心であるプロジェクトデザインやデザインシンキングに活きますか。

(回答 5 : 活きると思う, 回答 1 : 活きないと思う)

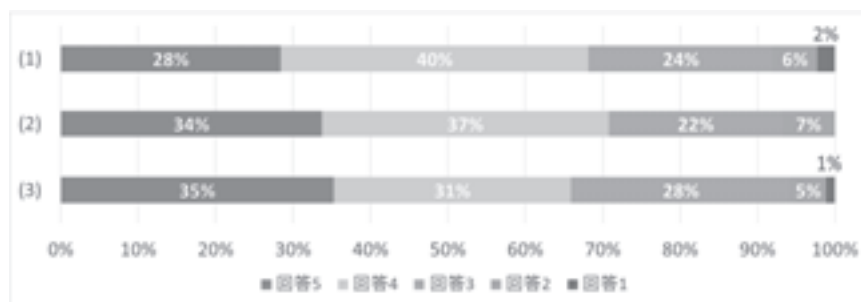


図7 アンケート結果

積極的に議論をして、理解が深まったと考えている学生（回答 5, 4）が多くいた。設問（1）～（3）に対して否定的な回答（回答 1, 2）をした学生の割合は、すべて 10 %未満であった。

次に、自由記述での学生の意見は、以下のようになった。

- ・授業中に教え合う機会が増えた。授業に対し主体的になりやすい。
- ・問題を紙に解くものより楽しい。また、論理的に考えることが増えると感じた。
- ・ただ問題を解くだけではなく、ディスカッションをすることで、理解を深められる。
- ・一体感があり、授業に集中できる。
- ・友達とディスカッションできたことが、授業内容もより深まったし良かったと思う。
- ・全員で議論をして、全員が意見を発表できる。
- ・他の人の考えた回答の過程を知ることができた。
- ・自分と違う意見を持つ相手と議論することで自分の問題に対する理解度がわかる。
- ・短時間でしっかり理解できる。

また、以下のような改善点に関する意見があった。

- ・少し難しいくらいの方が、議論がはかどると思う。
- ・互いに向き合った形でやりたい。
- ・回答までに時間がかかり、テンポが悪い。
- ・前回の講義内容の復習として毎回行う方がいい。
- ・話し合いが毎回同じメンバーであること。チーム変更などがあればよい。

改善点に関する意見については、今後の講義で改善する。

4. まとめ

数学の概念問題を線形代数、微積分、確率統計の分野で開発した。2016 年度と 2017 年度の 3 クラスにおいて、開発した数学の概念問題を用いて、ピア・インストラクションを導入した線形代数入門講義を実践した。線形代数に関する概念問題の学生同士の議論効果を仮説検定で定量分析した結果、他の単元より「図形の線形変換」の単元の議論効果が低いことが t 検定で示された。今後、t 検定の検証に基づき、数学の概念問題を改善し、また、新たに開発する。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP17K01096 の助成を受けたものです。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめ」(2016 年 8 月 26 日), 教育課程部会, 文

部科学省.

- 2) 覧具 博義, 物理教育研究の誕生とその背景, 物理教育 **64** (1), pp. 36-41, 2016.
- 3) E. Mazur, “Peer Instruction: A User’s Manual”, Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 1997.
- 4) 工藤 知草, 西 誠, 三嶋 昭臣, 「ピア・インストラクションを導入した物理学講義の実践ー学生同士のディスカッションによる深い学びー」, KIT Progress **25**, pp. 119-126, 2017.
- 5) T. Kudo, H. Yamaoka, T. Taniguchi, M. Nishi, and A. Mishima, “The Implementation of Peer Instruction in Mathematics and Physics Lectures”, Proceeding of The Asian Conference on Education & International Development 2018, pp. 191-197, 2018.
- 6) 「高大接続システム改革会議」最終報告書 (2016 年 3 月 31 日), 高大接続システム改革会議, 文部科学省.
- 7) 工藤 知草, 山岡 英孝, 谷口 哲也, 西 誠, 「対話的学びを実現する数学概念問題の作成と講義の実践ーピア・インストラクションを導入した線形代数講義の実践ー」, 日本工学教育協会, 平成 29 年度工学教育研究講演会講演論文集, pp. 322-323, 2017.
- 8) H. Yamaoka, M. Nishi, T. Kudo and T. Taniguchi, “Report on Active Calculus Course Introduced the Peer Instruction”, the 14th International CDIO Conference, 2018.
- 9) 谷口 哲也, 西 誠, 工藤 知草, 山岡 英孝, 「数学におけるピア・インストラクションの実践および授業効果」, KIT Progress **25**, pp. 127-133, 2017.
- 10) T. Taniguchi, T. Kudo, H. Yamaoka and M. Nishi, “Practice and Evaluation of Statistics an Introductory Lecture on Peer Instruction”, Proceedings of the 14th International CDIO Conference, pp. 466-471, 2018.
- 11) 「大学教育への提言ー未知の時代を切り拓く教育と I C T活用ー」(2012 年度版), 私立大学情報教育協会.
- 12) 新田 英雄, 松浦 執, 工藤 知草, ピア・インストラクションを導入した物理入門講義の実践と分析, 科学教育研究 **38** (1), pp. 12-19, 2014.

[原稿受付日 平成 30 年 8 月 20 日, 採択決定日 平成 30 年 11 月 12 日]



工藤 知草
講師・博士 (理学)
基礎教育部
数理基礎教育課程
数理工教育研究センター



山岡 英孝
准教授・博士 (情報学)
基礎教育部
数理基礎教育課程
数理工教育研究センター



谷口 哲也
講師・博士 (理学)
基礎教育部
数理基礎教育課程
数理工教育研究センター



西 誠
教授・博士 (工学)
基礎教育部
数理基礎教育課程
数理工教育研究センター