

音の性質を用いた指数の学習の導入 —音の周波数と指数関数との関係に関する教育の効果の検証—

A trial to learn exponent using properties of sound
-Verification of educational effect on the relationship between sound frequency and exponential functions-

中川 勇人, 北島 孝浩, 兒玉 浩一

NAKAGAWA Hayato, KITAJIMA Takahiro, KODAMA Koichi

2025 年 7 月に金沢工業大学において高校生を対象にした公開講座「音の周波数に見られる法則」を行った。音楽は数学や物理学と深い関係があり、古来数学の一部として研究されていたこともある¹⁾。音は波の性質を持ち、その高さは周波数に依存する。今回行った講座では十二平均律における音の周波数を指数を用いて表すことと和音を構成する音の周波数が単純な整数比で表せることを通じて音楽と数学の関係を感じてもらうことを目指した。

「指数」について、指数部分が負の数や分数となる場合は高等学校の「数学Ⅱ」で学習する。今回の講座は分数べきの指数関数を未修である場合は学習への動機づけに、既修の学生には発展・課題学習となる。

講義後にアンケートを実施した。本報告の目的は音の周波数を扱った講義の報告をし、それによる効果を調査することである。

キーワード：指数，音の周波数，十二平均律，ピタゴラス律，数理講座

In July 2025, we held an open lecture "Laws in sound frequency" for high school students at Kanazawa Institute of Technology. Music is related to mathematics and physics, and it was once studied as an area of mathematics. Sound has wave properties, and its pitch depends on frequency. The aim in this lecture was students could watch the relationship between music and mathematics by representing the frequency of notes in twelve equal temperament in using exponents and expressing the frequencies of chords' notes as simple integer ratios.

Students learn exponents whose exponent is a negative number or a fraction in "Mathematics II" in high school. This lecture will be useful as a motivation to learn for those who have not yet studied, and as an application exercise for those who have already studied it.

We conducted a questionnaire after the lecture. The purpose of this paper is to report the lecture on sound frequencies and to investigate the effect.

Keywords: Exponents, Sound frequencies, Twelve equal temperament, Pythagorean tuning, Mathematical and Scientific Courses

1. はじめに

金沢工業大学（以下、本学）数理工教育研究センターにおいて、2007 年より高校生を対象に「KIT 数理講座」（以下、数理講座）を毎年開催しており（2021 年度を除く）、中川が 2023 年度に「計算尺を使ってみよう」、北島が 2024 年度に「ルービックキューブの数理」を担当している²⁾³⁾。数理講座の目的は高校生の数学、物理学や工学について興味を掘り起こし、その理解を深めてもらうことにある。センターの教員 2 名が中心となり、発案した講座を実施している。

2025 年 7 月 19 日に本学扇が丘キャンパス 23 号館において 18 回目が開催され、それぞれの講義は 60 分間で実施した。石川県内の高校を中心に参加者は 20 名（1 年生 5 名、2 年生 11 名、3 年生 4 名）であった。前半は「数理最適化を通して学ぶ数理モデルの作り方と計算科学」（渡辺秀治准教授担当）、後半は「音の周波数に見られる法則」（中川勇人講師担当）の 2 つの講座を実施した。本稿では、この 2 つの講座のうち、著者の一人である中川が担当した講座（以下、本講座）について、講座概要や目的、講義内容、アンケートによる分析を詳細に報告する。

2. 講座の目的と内容

2.1 講座の目的

本講座では、数学的視点から音を分析することで指数関数の理解につなげることを目指す。具体的には、

- 音は波であり、音の高さは周波数と関係すること
- 美しく聴こえる和音はその構成音の周波数が簡単な整数比であること
- 十二平均律とピタゴラス律

を学習して指数関数の学習への動機づけや探究課題の提供とした。十二平均律における音の周波数は先に与えて、そこから法則性を発見させる方針とした。ピタゴラス律は与えられた法則から構成する形とした。音楽を楽しむのにこれらは必ずしも必要ではないが、知っていれば新しい視点が得られる。数学に限らず、生徒が今後の学習への動機を得て興味を増すこと、帰納的・演繹的手法を身につけることができれば、本講座の目的は十二分に達成されたとしてよいであろう。

2.2 音の周波数の数学的原理

音楽は今も昔も人類の営みの一部であり、古くより研究もされてきた。数学・物理学とも大いに関連があり、今回の講座のテーマである「音の高さが周波数と関連すること」「和音が簡単な整数の比の周波数である音で構成されること」（指数関数・対数関数）はもちろん、他にも「うなり・倍音」（三角関数・数列）、「ノイズリダクション」（フーリエ変換）など様々な話題にそれが見られる。

今回は指数関数に関連した話題として音の周波数と和音の仕組みを取り上げた。「周波数」という概念が知られるのはかなり後の時代になるが、既にピタゴラスがいた時代（BC580-500 頃）には同等の存在が気づかれていたようである。実際にパンフルートなど笛・管楽器では長さを 1:2, 2:3, 3:4 などの単純な比にすると音の響きが良いことは経験上知られており、長さの逆数が周波数と正比例の関係である。ある系統の音楽でどんな高さの音を使うかというルールのことを音律という。1:2, 2:3, 3:4 はそれぞれオクターブ・完全五度・完全四度（ドと一つ高いド・ドとソ・ドとファ）に対応し、ピタゴラス律は 1:2, 2:3 を実現するよう 1 オクターブを 12 の音に分割し、純正律（2 世紀以降）では加えて 3:4 も実現できるようにしている。現在では鍵盤楽器や転調といった新しい音楽表現の方法の登場により、1 オクターブを対数スケールにおいて完全に 12 等分割した十二平均律が主流である。十二平均律は 16 世紀ごろにヨーロッパ・中国・インド・日本（和算家中根元圭, 1692）など各地で独立に研究されたようである。

具体的に十二平均律を構成してみよう。時代によるが、現在では A4（ピアノ中央あたりにあるラ）を 440 Hz にすることが多い。1 オクターブ高いラ（A5）は $440 \times 2 = 880$ Hz である。隣り合う音は「半

音高い（低い）」と表現し、半音高い音の周波数が x 倍とすると半音 12 個分高い音が 1 オクターブ高い音であることから $440 \times x^{12} = 880$ が成立するはずである。こうして、 $x^{12} = 2, x = 2^{1/12} \cong 1.059$ となる。ラ(A4)の 440 Hz から順次この x をかけていくことで以下の周波数の表が得られる。

表 1 ラ(A4)から1オクターブ高いラ(A5)までの周波数(Hz)とラ(A4)を基にした倍率

ラ	シ♭	シ	ド	ド♯	レ	レ♯	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ
440	466.2	493.9	523.2	554.4	587.3	622.2	659.3	698.5	740.0	784.0	830.6	880
2^0	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	2^1

完全五度および完全四度高い音(ドに対してならソとファ)はそれぞれ半音 7, 5 個分高いので、 $2^{7/12} = 1.4983 \dots \cong 1.5, 2^{5/12} = 1.3348 \dots \cong 1.33$ 倍の周波数をもつことがわかるが、これは従来の 2:3, 3:4 とほぼ一致している。十二平均律は少々誤差はあるが、どの音を基準にしても同じような音の組み合わせで似た響きを出せるように工夫した音律といえる。

オクターブや完全五度のように単純な整数比である周波数の音どうしは響きが良いといえる。これを 2 音でなく 3 音以上に適用したのが和音(コード)である。一番低い音(根音)を基準として半音何個分高い音であるかによって和音は分類される。3 音ならメジャー(長三和音)など、4 音ならセブンスコード(属七の和音・長七の和音)などがある。メジャーは根音とそれより 4 および 7 個半音高い音で構成されるもので、C であればド・ミ・ソを同時に鳴らした和音である。周波数比は $1:2^{4/12}:2^{7/12} = 1:1.2599 \dots:1.4983 \dots \cong 1:1.25:1.5 = 4:5:6$ と簡単な整数比になる。メジャーに根音より 10 個半音高い音を追加した属七の和音でも $4:5:6:7$ と簡単な整数比になる。

ピタゴラス律ではオクターブと完全五度を考慮して音律を構成する。基準のドの周波数を 1 とすると完全五度分高いソの周波数は 1.5 となる。さらに、完全五度分高いレの周波数は $1.5^2 = 2.25$ であるが、基準のドに近いレでなく 1 オクターブ高いレのため基準のドに近いレは $2.25/2 = 1.125$ となる。順に完全五度分高い音の周波数を計算していくことで各音の周波数を得られる。また、完全五度分低い音についても同様に計算でき、例えば基準のドより完全五度分低いファの周波数は $1 \div 1.5 = 0.666 \dots \cong 0.667$ となり、1 オクターブ高いファの周波数は $0.666 \dots \times 2 = 1.333$ となる。こうして 12 音の周波数が得られるが、基準のドから 8 回分完全五度分低いソ♯は約 1.602, 4 回分完全五度分高いソ♯は約 1.580 と同じ音でありながら誤差が生じる。これはピタゴラスのコンマと呼ばれるものである。十二平均律では

$2^{1/12} \cong 1.4983$, ピタゴラス律では 1.5 で隣り合う音間の周波数を計算しており、約 0.0017 倍しか違わないが累乗計算を 12 回することで約 0.02 倍にまで誤差が積みあがっていることになる。指数関数のテーラー展開を考えれば 0.02 が 0.0017×12 で近似できることを説明できる。

2.3 講座の内容

生徒 20 名を 1 グループ 4 名の 5 グループに分けた。担当講師のほか数名の教員が補助についた。講座は説明→実践(作業・演習)を 3 回行う形にした。

2.3.1 準備した物

生徒には印刷物(スライド)を配布し、講義を進めても振り返ることができるようにした。また、あらかじめ各グループにはそれぞれパソコン 2 台、ホワイトボード、関数電卓を配備した。パソコンには演習で使用するエクセルファイルと音(和音も含めて)を実際に鳴らすことのできるウェブページへのリンクを用意した。図 1 のような和音のカードも準備しておき、演習 3 をする直前に各班に 1 枚ずつ配布した。上手くエクセルファイルで計算できなかった生徒のための代替手

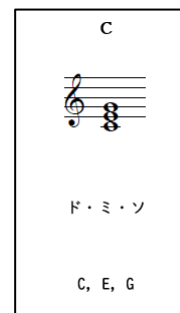


図 1 和音 C

段としてグループごとに関数電卓を1台置いたが、パソコンで事足りたことと関数電卓自体に習熟していないことからあまり使われなかった。

2.3.2 パート1：音の高さと周波数の関連を知る

和音が何であるか知らない生徒もいることが予想されるため、まず2曲を聴いてもらった。1曲目は”Happy Birthday to You”であり、伴奏にCメジャーなどの典型的な和音が出てくるよう編曲した(図2)。2曲目は”結婚行進曲(Wedding March)”(メンデルスゾーン作曲)であり、出だしのメロディがCメジャーである(図3)。これらの楽曲を鑑賞して和音が組み合わせの決まった複数の音を同時に鳴らしたものであり、普段聞く音楽にも含まれていると感じてもらった。



図2 Happy Birthday to You の楽譜 (冒頭)



図3 結婚行進曲の楽譜 (冒頭)

和音の仕組みを知るため、一旦単音に話を戻した。音は波の性質を持つことを波に関する基本事項(周波数・波長)とともに紹介した。音は音色ごとに様々な波形を持つが、この講座では三角関数であるという前提を設けた。三角関数は通常では数学Ⅱの中盤(高校2年生の中頃)に学ぶものと予想され大半の生徒は未修であるため、「増えて減ることを繰り返すなめらかな関数」として周期性以外は感覚的にわかればよいとした。

音の周波数に関して、(A)「オクターブ違いの音の周波数は2倍になること」を話した。そして、これから予想されることとして、(B)「同じだけ高さの違う音の周波数の比は同じであること」を仮定した。この2つの事柄(A)(B)により、一つの基準(A4を440Hzとする)を設定することで音の周波数は一意に決定される。今回は各音の周波数を与えておき、演習1として周波数の倍率が大体1.059倍で一定であることを確認させた。また、演習2として周波数をグラフにプロットさせた。これらの演習により指数関数の性質の一つを体験し、グラフを作成する体験ができた。

2.3.3 パート2：和音の構成音の周波数に見られる法則性を見つける

半音6個分高さの異なる2音の周波数比を $1:x$ とすると、(A)(B)により $x^2 = 2, x = \sqrt{2}$ と求まる。同様に半音だけ異なる2音の周波数比を $1:y$ （演習1で求めた通り $y \cong 1.059$ ）とすると、 $y^{12} = 2$ となる。これらを統一的に見るために、指数法則が指数部分が自然数でなくても成立するということを認めて、 x, y が2の何乗かで表せるとしたときに $x = 2^{\frac{1}{12}}, y = 2^{\frac{1}{12}}$ になることを示した。

ここで和音の話に入った。各グループに異なる和音のカードを配布した。和音はいずれもメジャー(A, B♭, B, C#, D)である。演習3としてそれぞれ配布された和音を構成する3音の周波数を簡単な整数比で表し、指数でも表すことにも挑戦してもらった。また、整数比と指数で表した比を準備してあるエクセルファイルで確認することができるようにしてあった。5グループともホワイトボードに計算結果「4:5:6」と正解が書かれて、ここで同じグループの和音が同じ周波数比になることに気づく生徒が多かった。

2.3.4 パート3：ピタゴラス律を作る

十二平均律が音の高さが同じであればどの高さであっても周波数の倍率が同じであること、和音が同じ周波数比をもつ音で構成されていることを確認し、周波数比が簡単な整数比であるほど美しく聴こえるとされることに言及した。古来より音律が研究され、ピタゴラス律はオクターブの次に単純な比である2:3、純正律はそれに4:5も考慮していることなど、音律の歴史について紹介した。このうちピタゴラス律について、作成方法を教え、演習4として計算によってその音律を構成させた。答え合わせの後、ピタゴラス律と十二平均律ではそれぞれ $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1.5^x, \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^x \cong 1.4983^x$ で周波数を計算しており、1.5と1.4983では約0.0017倍しか違わないが、累乗計算を12回することで約0.02倍にまで誤差が積みあがることを確認して本講座は終了となった。時間的余裕がなく、終了間際に慌ただしく進めてしまったのは反省である。

3. 調査方法

本講座終了後に無記名のアンケート（表2）を実施した。受講生徒20名全員に加え引率教員4名が回答しており、選択式設問（マークシート）については無回答がなかった。つまり、いずれの設問も有効回答数は24である。このアンケートにはもう片方の講座（設問1）や数理講座全体に関する設問も含まれている。以下、本講座に関係するもの、および数理講座全体に関するものについて分析する。

表2 数理講座アンケート設問と回答選択肢

1	数理最適化を通して学ぶ数理モデルの作り方と計算科学 (本講座とは無関係のため省略)
2	音の周波数に見られる法則
【1】	この講座を受講して、この分野に興味を持てましたか？

1. とても興味を持てた	2. 興味を持てた
3. あまり興味を持てなかった	4. 興味を持てなかった
【2】この講座を受講する前に、指数関数についてどの程度知っていましたか？	
1. ほとんど知っていた	2. 少し知っていた
3. あまり知らなかった	4. ほとんど知らなかった
【3】この講座を受講する前に音楽についてどの程度経験がありましたか？	
1. 作曲するほど	2. 演奏するほど
3. よく聴く程度	4. ほとんどない
【4】講座と演習のレベルについておたずねします。	
1. とてもやさしかった	2. やさしかった
3. 難しかった	4. とても難しかった
【5】「音の周波数に見られる法則」を受講して学んだこと、ご感想等をお聞かせください。	
(自由記述)	
3 今後もこのようなイベントに参加したいと思いますか？	
1. ぜひ参加したい	2. できれば参加したい
3. どちらでもよい	4. あまり参加したくない
4 今回の「KIT 数理講座」全体で、学んだこと、気づいたこと、ご要望等がありましたら、ご自由にご記入ください。	
(自由記述)	

4. 調査結果および考察

4.1 選択式設問のアンケート結果

今回の講座のテーマは音であった。音楽とのかかわり具合で、音についての予備知識を調べた。

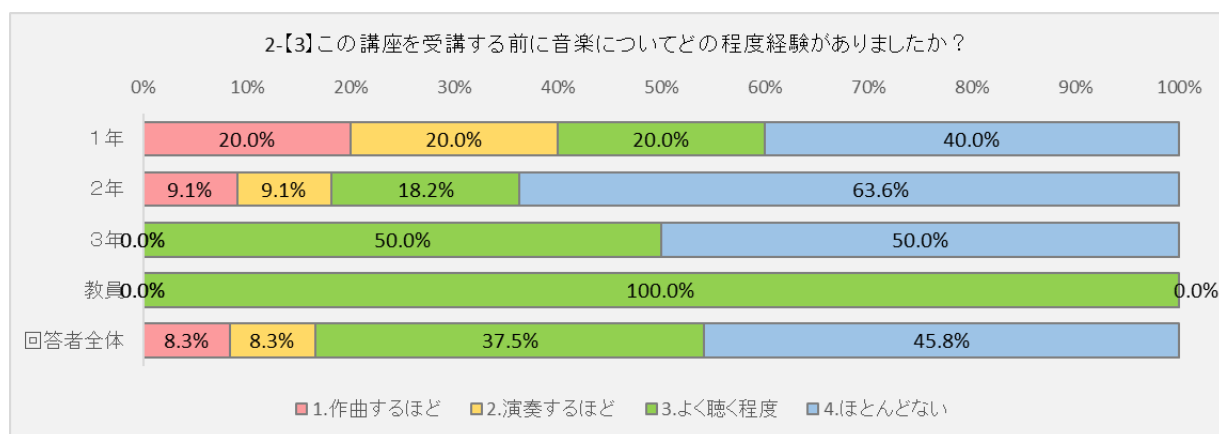


図4 音楽の経験

作曲や演奏するなど能動的な経験があるのは4名で、ほとんどの学生はよく聴く（回答3）以下と回答した。学校での音楽教育以上の知識はないと思ってよい。

本講座の理論的に主となる内容は指数関数であった。

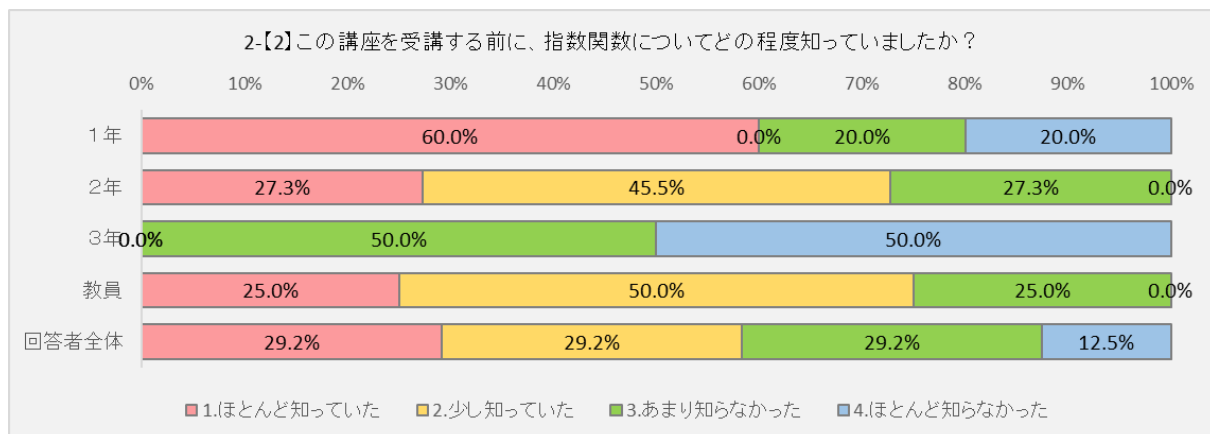


図 5 指数関数についての予備知識

参加した生徒は全て普通科の高等学校であり、学年が上がるにつれてほとんどまたは少し知っていた（回答 1,2）が増えるものと期待したが、全く逆の回答結果が得られた。次に講座・演習の難易度についてである。

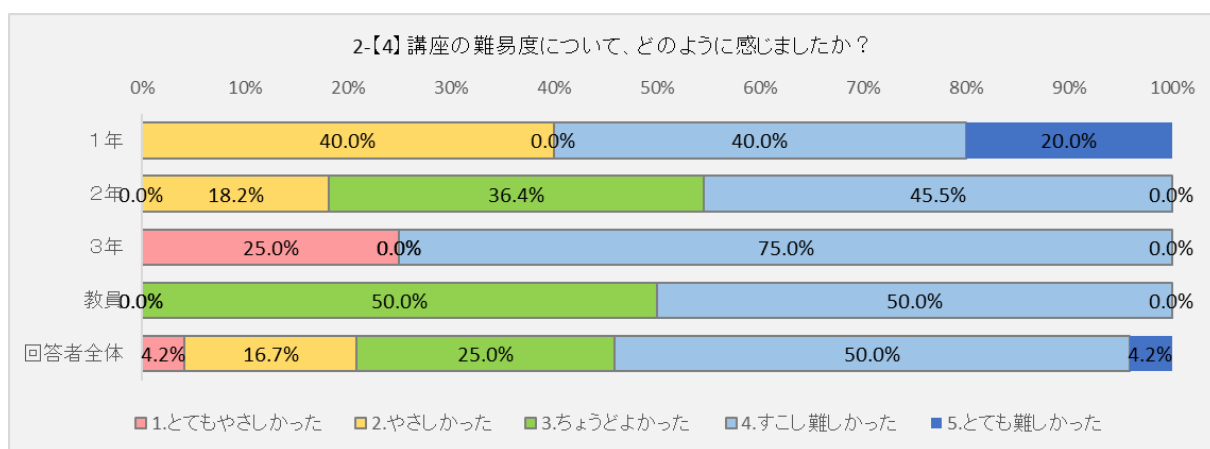


図 6 講座・演習の難易度

全体としては難しさを感じたという回答（回答 4,5）が半分ということになった。三角関数を使わずに説明を進めたため原理的な面で少し飛躍したところがあった、音楽について未知であるなどということが難しく感じた要因と考えられる。また、学年が上がるとやさしく感じる生徒が増える傾向にあった。図 5（指数関数についての予備知識の結果）では高学年ほど指数関数を知らないため難しく感じるはずである。結果がねじれる理由を推測すると、1 年生は指数関数は指数や指数法則を指すもので既修と回答するが、学年が上がるにつれて指数関数が関数としても認識され、既修への基準が上がっていることが考えられる。

次に、本講座に対して興味を惹くことができたかをみる。

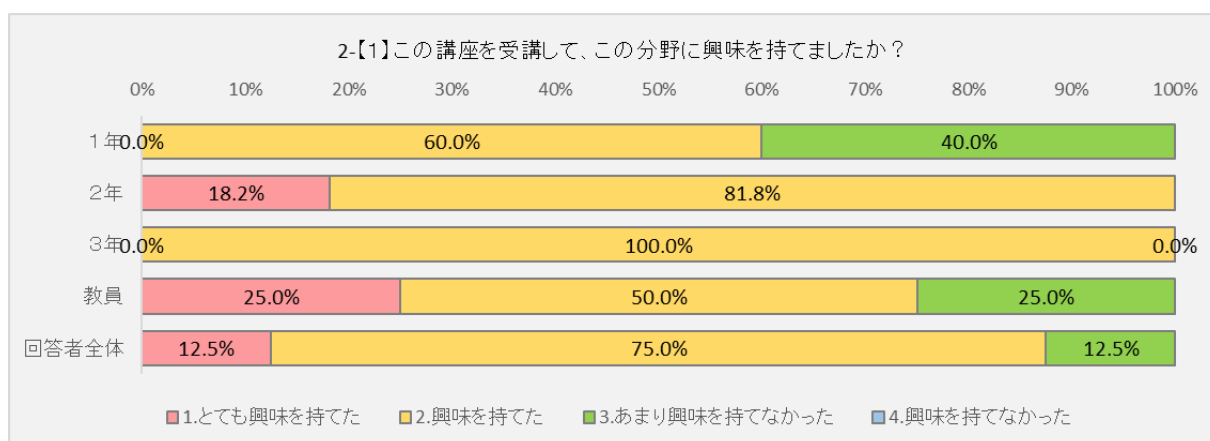


図7 興味を惹けたかどうか

興味を持てたと回答した生徒（回答 1,2）が約 9 割となった。60 分という短い時間ではあったが、音楽と指数関数という人によってはこれまで触れてこなかったことを併せて学習するという内容でここまで関心を持たせることができ、とても満足できる結果となった。

参考として、数理講座全体に対する感想を見ておく。

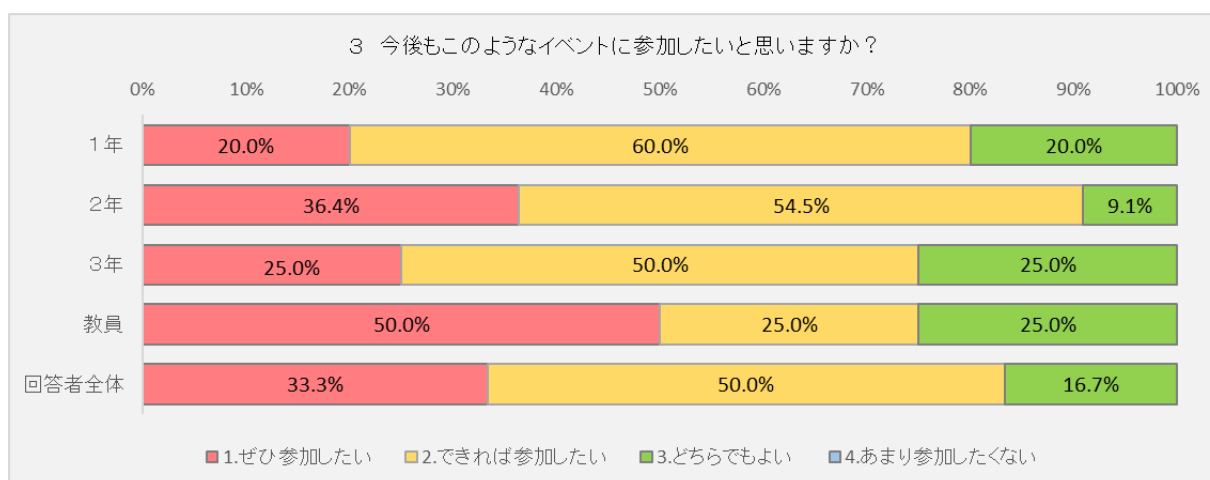


図8 講座全体に対する感想

2 講座合わせでの評価なので、そのまま本講座単独に対する分析とはできないが、今後も参加したいと回答した生徒（回答 1,2）が 8 割以上あり、講座の構成が評価されたと思われる。

4.2 自由記述回答の分析

設問 2【5】の自由記述回答について、KH Coder を用いた共起ネットワークを作成した⁴⁾。出現頻度の高い語（最小出現数 2）を抽出しており、図 9 において円の大きさが各単語の出現頻度、単語間を結ぶ線の太さが共起関係の強度（Jaccard 係数）を表している。受講生徒と教員 24 名がすべて回答しており無回答はなかった。

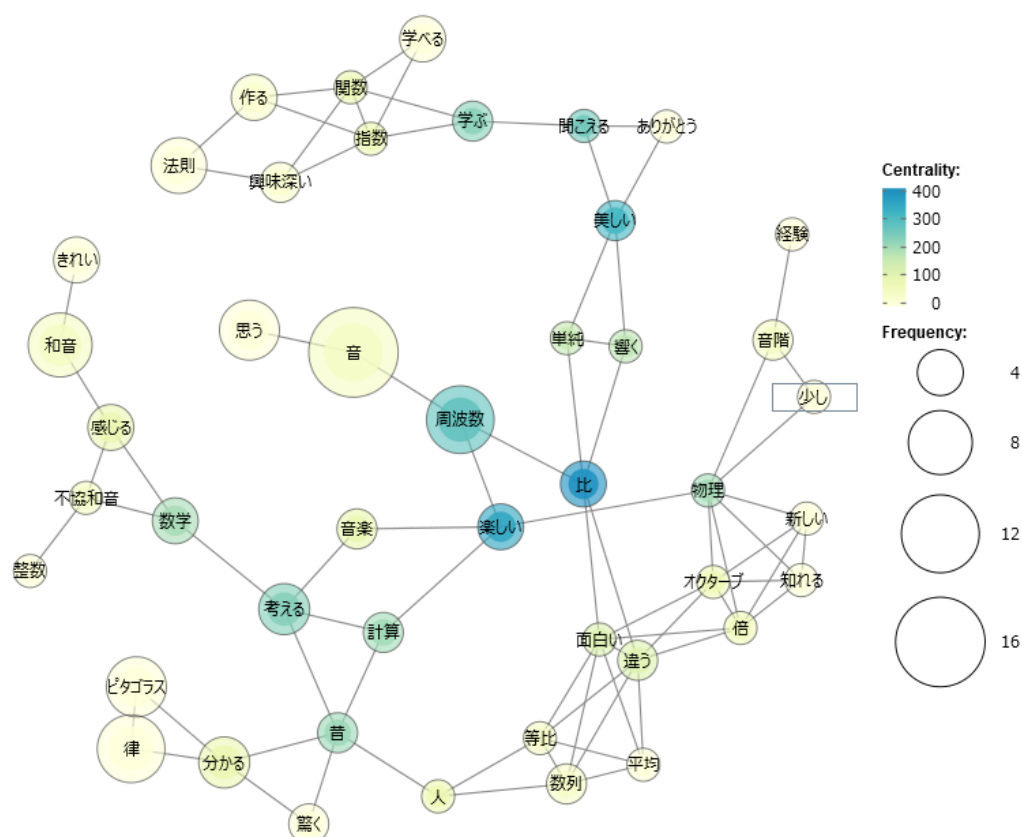


図9 本講座全体について学んだことおよび感想

元のアンケート回答も参照しながら自由記述の特徴を整理すると以下のようになる。

- 音を数値として表現できることが興味深い

- なぜ和音がよく感じるのかを数学的に説明できるというのがおもしろかった

多くの感想が音が数学と関連することを初めて知ったというものであった。「周波数」「ピタゴラス律」など音に直接関連する単語以外にも「数学」や「指数」「関数」周辺の単語も多く出ている。また、

- ピアノをしているけど、音と音の配分みたいなのを考えたことがなかったのでタメになった
- 次はカノン進行などがなぜ美しく聞こえるかについて学んでみたい

のように、音楽に関して経験者と思われる生徒からのコメントもあった。カノン進行には全く触れていないため、本講座の内容を生徒自身が自身の知識と関連付けようとしてることがわかる。本講座が目指すもの以上の効果があり大変満足している。さらに

- 法則から音階を作ったのか、それとも経験から作った音階に法則が見つかったのか？

のように、新しく疑問をもつ生徒もいたようで、今後の学習へのきっかけを与えられている。おもしろかったという回答が多く、生徒の関心・興味を惹くことができたといえる。

5. まとめ

本講座では和音の構成音の周波数について計算により法則を見出すことにより指数関数の学習へつなげることを目的とした。演習やグループでの議論を経て指数関数の性質を発見し感じる事ができたと思われる。実際に演奏を聴くことや和音を自分の手で鳴らすことは、数学がただの数字遊びではなく実生活に密着したものであることを感じる良い経験になる。60分という時間の制限と生徒の予備知識のば

らつきで企画の難しさはあったが、高校での指数関数の単元の導入や理解になるだけでなく、今後の理系科目の学習にも良い影響があれば幸いである。

音楽については和音以外にも 2.2 節で紹介したように三角関数のような高等学校学習内容からフーリエ変換・テーラー展開のように大学で扱う内容まで、さらには音響工学といった工学的分野もあり関連する範囲はかなり広い。本講座でのように体験型教育コンテンツとして題材は豊富であり、STEAM 教育としても有益である。音楽は直感に訴える側面があり教育的効果の高い題材を探し出し、効果的であるよう整理・改良して、学びの場に提供していきたい。

6. 謝辞

本講座の補助をしていただきました数理工教育研究センターの八島高将先生、講座実施に関して有益な助言をいただきました工藤知草先生、山岡英孝先生、アンケートの実施などサポートしていただきました朝日正様、さらに、数理講座の運営にご協力を頂きましたセンター教職員の方々にはこの場を借りて心から感謝致します。

参考文献

- 1) 小方厚・音律と音階の科学・講談社・2007
- 2) 中川勇人, 兒玉浩一・計算尺を用いた学習の試み—対数の性質と2次方程式の解法—・KIT Progress・No.32・pp.52-61・2024
- 3) 北島孝浩, 中川勇人・ルービックキューブを題材とした高校生向け公開講座の事例紹介・KIT Progress・No.33・pp.142-151・2025
- 4) 樋口耕一・社会調査のための計量テキスト分析[第2版]・ナカニシヤ出版・2020

[受付日 令和7年(2025年)8月18日, 採択日 令和7年(2025年)10月31日]



中川 勇人
講師・博士(数理学)
基礎教育部
数理・データサイエンス・
AI教育課程
数理工教育研究センター



北島 孝浩
講師・博士(理学)
基礎教育部
数理・データサイエンス・
AI教育課程
数理工教育研究センター



兒玉 浩一
講師
基礎教育部
数理・データサイエンス・
AI教育課程
数理工教育研究センター